

19 - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$

- (1) احسب S_1, S_2, S_3, S_4
- (2) تخمن عبارة S_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

20 - x عدد حقيقي كفي

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = (x-1) \sum_{r=0}^{n-1} x^r$
- (2) باستعمال العلاقة التي تسمح بحساب مجموع حدود متتالية هندسية بين صحة العلاقة السابقة.

21 - (U_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} بـ $U_0 = 6$ و $U_{n+1} = 10U_n - 27$

- (1) احسب U_1, U_2, U_3, U_4
- (2) تخمن عبارة U_n بدلالة n ثم برهن بالتراجع على هذا التخمين.

22 - x عدد حقيقي

- (1) $x(1-x) + x^2(1-x) + x^3(1-x) + \dots + x^n(1-x) = 1 - x^{n+1}$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{n+1}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1}$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ إذا $|x| < 1$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = x$ إذا $|x| = 1$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = \infty$ إذا $|x| > 1$

23 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \right) = 1$

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ إذا $k > 1$

24 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^n} \right) = 1$

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$ إذا $k > 1$

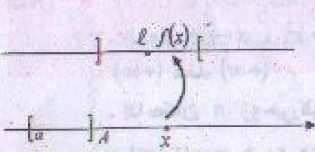
(3) 2^{n+1} مضاعف للمعد

الدرس 2

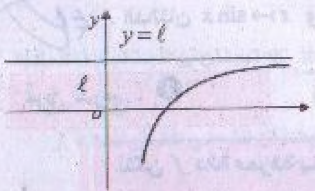
النِّهَايَاتُ وَالِاسْتِمْرَارُ

1 - النهايات في اللانهاية والمستقيمات المقاربة

1 - 1 النهاية المنتهية عند $(+\infty)$ والمستقيم المقارب الأفقي



القول أن الدالة f لها نهاية حقيقية l عند $(+\infty)$ يعني أن كل مجال مفتوح مركزه l يشمل كل قيم $f(x)$ المأخوذة من أجل كل قيم x الكبيرة (أي من أجل كل قيم x من المجال $[A, +\infty[$) و تكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$



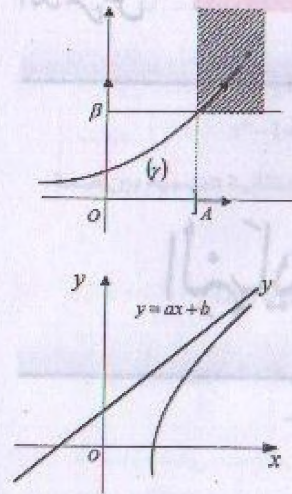
إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن المستقيم ذي المعادلة $y = l$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$

ملاحظة

نعرف بطريقة ماثلة $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

مثال -

الدوال $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ، $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ ، $x \mapsto \frac{1}{x}$ عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$



1-2 النهاية الغير المنتهية عند $(+\infty)$

نقول ان الدالة f لها نهاية $(+\infty)$ عند $(+\infty)$ يعني ان كل مجال مفتوح من الشكل $[\beta, +\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$ للاخوذة من اجل كل قيم x الكبيرة (اي من اجل كل قيم x من المجال $[A, +\infty[$) وتكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ اذا كانت $f(x)$ تكتب على الشكل $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ مع $f(x) = ax + b + h(x)$ فان المستقيم ذا المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحنى الدالة f بجوار $(+\infty)$

ملاحظة

نعرف بطريقة مماثلة النهايات الغير المنتهية عند $(-\infty)$

مثال -

الدوال $x \mapsto \sqrt{x}$ ، $x \mapsto x^n$ مع $(n \in \mathbb{N}^*)$ ، $x \mapsto x^2$ ، $x \mapsto x$ عند $(+\infty)$ اذا كان n زوجي فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ ، اذا كان n فردي فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = -\infty$ الدالتان $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \sin x$ ليست لهما نهاية عند $(-\infty)$ و عند $(+\infty)$

تمرين تدريبي 1

لتكن f دالة معرفة بالمعبارة $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- اوجد العدد الحقيقي A بحيث اذا كان $x > A$ فإن $f(x) > 2,9$ فإن $f(x) > 3,1$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x-1} = 3 \quad (1)$$

(2) نقول ان $f(x) > 2,9$ يعني بذلك $3,1 > \frac{3x-2}{x-1} > 2,999$

وبما اننا نهتم بالقيم الكبرى لـ x فإن $x-1 > 0$

بضرب حدود المتباينة $3,1 > \frac{3x-2}{x-1} > 2,999$ بالعدد $(x-1)$ نجد:

$$3,001(x-1) > 3x-2 > 2,999(x-1)$$

$$0,001x - 3,001 > -2 > -0,001x - 2,999$$

حل المتراجحة $0,001x - 3,001 > -2$ يكافئ حل الجملة التالية:

$$\begin{cases} -2 > -0,001x - 2,999 & (1) \\ 0,001x - 3,001 > -2 & (2) \end{cases}$$

بعد حل المتراجحة (1) نجد $x > -999$

بعد حل المتراجحة (2) نجد $x > 1001$

ان مجموعة حلول الجملة (1) هي $[1001, +\infty[$

وبالتالي يمكن اخذ $A = 1001$

اي كلما اخذ x فيما اكبر من A فإن قيم $f(x)$ تتركز حول القيمة 3.

تمرين تدريبي 2

من اجل الدالة f المعرفة على \mathbb{R} نعلم ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x + 1) = 0$ ونعلم ايضا لـ $x > 5$ فإن $f(x) > 4$

ولـ $x < -8$ فإن $f(x) - x + 1 < 0$ ماذا نستنتج بالنسبة للمنحنى الدالة f ؟

الحل

العلومة « $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ » تبين لنا ان المستقيم ذا المعادلة $y = 4$ مقارب افقي للمنحنى الممثل للدالة f في جوار $(+\infty)$

العلومتان « $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ » و « $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x + 1) = 0$ » تبينان ان المستقيم ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى الممثل للدالة f عند $(-\infty)$.

العلومة « $f(x) > 4$ » فإن $x > 5$ تبين لنا ايضا ان المنحنى الممثل للدالة f يكون فوق المستقيم ذي المعادلة $y = 4$ على المجال $[5, +\infty[$

العلومة « $f(x) - x + 1 < 0$ » فإن $x < -8$ تبين لنا ان المنحنى يقع تحت المستقيم القارب المائل ذي المعادلة $y = x - 1$ على $]-\infty, -8[$

تمارين تدريبي 3

لتكن f دالة معرفة كما يلي $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x}$ مع $x \neq 0$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) ماذا تستنتج من حساب النهايتين السابقتين بالنسبة للمنحنى الممثل للدالة f ؟

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

(2) نستطيع كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$

- بما ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ فإن الاستقيم $y = x+2$ مقارب

ماثل للمنحنى الممثل للدالة f في جوار $(-\infty)$ و $(+\infty)$

- بما ان $f(x) - (x+2) = \frac{1}{x}$ فإنه إذا كان $x > 0$ فإن المنحنى يقع فوق المستقيم (d)

و إذا كان $x < 0$ فإن المنحنى يقع تحت (d) حيث $(d) : y = x+2$

2 - نهاية دالة عند عدد حقيقي a

نرمز بـ D_f إلى مجموعة تعريف الدالة f

و a عدد حقيقي ينتمي إلى D_f

أو a لا ينتمي إلى D_f (a حاد لـ D_f)

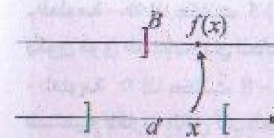
2 - 1 النهاية المنتهية عند a - المستقيم المقارب العمودي

نقول ان الدالة f لها النهاية $(+\infty)$ عند a

يعني ان كل مجال من الشكل $[\beta, +\infty[$ يشمل كل

قيم $f(x)$ للأخوذة من أجل كل قيم x القريبة من a

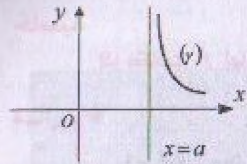
(أي من أجل كل x من المجال $]a-\alpha, a+\alpha[$ ومن D_f)



و نكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ فإن المستقيم

ذا المعادلة $x = a$ مقارب عمودي للمنحنى الممثل للدالة f



ملاحظة

(1) نعرف بطريقة مماثلة $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

(2) نقول ان $f(x)$ يؤول إلى $(-\infty)$ لـ x يؤول إلى a

يعني ان $-f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ لـ x يؤول إلى a

مثال -

لتكن f و g دالتين معرفتين على $]0, +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ و } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

- الصفر هو حاد لمجموعة تعريف f .

مهما كانت قيمة العدد الحقيقي M كبيرة فالأعداد $f(x)$ تتجاوز قيمة M

من أجل كل قيمة لـ x من $]0, \frac{1}{M}[$ لأن المتباينة $\frac{1}{x} > M$ تكون صحيحة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ و نكتب } 0 < x < \frac{1}{M}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$
 بنفس الكيفية السابقة نبين ان

2 - 2 النهاية الحقيقية (المنتهاية) عند a

نقول ان العدد الحقيقي ℓ هو نهاية الدالة f لـ x يقترب من a

يعني ان كل مجال مفتوح مركزه L يشمل كل قيم $f(x)$ للأخوذة من أجل كل قيم x

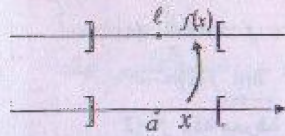
القريبة من a (أي من المجال $]a-\alpha, a+\alpha[$ ومن D_f)

$$\text{و نكتب } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

هذا التعريف يعني ان المسافة بين $f(x)$ و ℓ

تقترب من الصفر.

$$\text{اذن } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \text{ تعني ان } \lim_{x \rightarrow a} |f(x) - \ell| = 0$$



نتيجة

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ فإن } a \text{ لها نهاية } \ell \text{ عند } a \text{ و } D_f \text{ من } a$$

خاصية

إذا كانت f لها نهاية ℓ عند a فإن هذه النهاية وحيدة

مثال

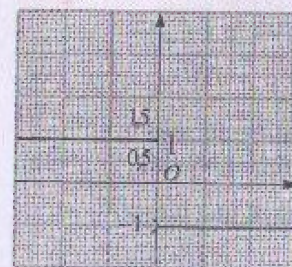
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

يمكننا أن نثبت صحة هاتين النهايتين باستعمال نظرية الحصر.

ملاحظة

ليس بالضرورة أن تكون لدالة نهاية عند قيمة من مجموعة تعريفها

مثال



f دالة تمثيلها البياني كما في الشكل
 $f(0)=1$ لكن f ليس نهاية لـ f لا x يؤول إلى الصفر.
 لأن باعتبار المجال المفتوح $I =]0.5, 1.5[$ فإنه من أجل كل قيم x القريبة من الصفر وأكبر تماما منه يكون $f(x) = -1$ لكن -1 لا ينتمي إلى المجال I .

النهاية من اليمين و من اليسار عند a

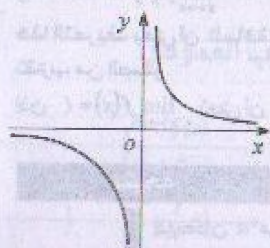
يحصل وأن دالة لا تقبل نهاية (حقيقية أو غير منتهية) عند a لكن اقتصارها على مجال من الشكل $]a, b[$ لها نهاية ℓ عند a .

نقول عندئذ أن f لها نهاية من اليمين عند a ونكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

بنفس الطريقة إذا كان اقتصار f على المجال $]c, a[$ يقبل نهاية ℓ عند a نقول أن f

تقبل نهاية من اليسار عند a ونكتب $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

مثال



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty, \quad f: x \mapsto \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

(2) f دالة معرفة على \mathbb{R}

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2\sqrt{x^2}}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

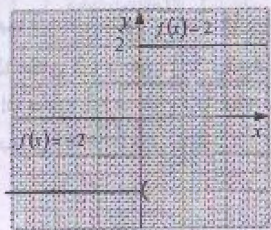
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2|x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x} = -2$$

الدالة f ليس لها نهاية عند الصفر.



تمرين تدريبي

f دالة معرفة بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x+5}$ لها النهاية 3 عند 4
 أوجد مجال I مركزه 3 بحيث إذا كان $x \in I$ فإن $f(x) \in]2.99, 3.01[$

الحل

القول أن $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]2.99, 3.01[$ يعني $2.99 < f(x) < 3.01$

أي $2.99 < \sqrt{x+5} < 3.01$ بالتربيع نجد $8.9401 < x+5 < 9.0901$

و بطرح 5 من حدود هذه الأخيرة نجد $3.9401 < x < 4.0901$ إذن $I =]3.9401, 4.0901[$

تمرين تدريبي

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{2, 3\}$ جدول تغيراتها هو

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	$-\infty$	5

استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى البياني للدالة f و عين الوضع النسبي لهذه المستقيمات بالنسبة إلى منحنى f .

الحل

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ فإن للمستقيم (d_1) ذا المعادلة $y = 2$ مقارب أفقي للمنحنى (γ)

حالة نهاية الدالة g غير معدومة

$+$ أو $-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية f
$+$ أو $-\infty$	$\ell' < 0$	$\ell' < 0$	$\ell' < 0$	$\ell' < 0$	$\ell' < 0$	$\ell' < 0$	إذا كانت نهاية g
$+$ أو $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' > 0$	$\ell' > 0$	$\ell' > 0$	$\ell' > 0$	$\ell' > 0$	إذا كانت نهاية g
$+$ أو $-\infty$	0	0	0	0	0	0	إذا كانت نهاية g
$+$ أو $-\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	إذا كانت نهاية g

حالة نهاية الدالة g معدومة:

0	$\ell < 0$ أو $-\infty$	$\ell < 0$ أو $-\infty$	$\ell < 0$ أو $-\infty$	$\ell < 0$ أو $-\infty$	$\ell < 0$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية f
0	0^+	0^+	0^+	0^+	0^+	إذا كانت نهاية g
0	0^-	0^-	0^-	0^-	0^-	إذا كانت نهاية g
$+$ أو $-\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	إذا كانت نهاية g
$+$ أو $-\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	إذا كانت نهاية g

حالات عدم التعيين هي $+\infty - \infty$ ، $0 \times \infty$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

- نعلم أن نهاية دالة كثيرة الحدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة.
- نهاية الدالة الناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$ تساوي نهاية حاصل قسمة وحيد الحد الأكبر درجة البسط وكذلك في المقام.

مثال -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

تمرين تدريبي - 1

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + x$

احسب النهايتين التاليتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

الحل

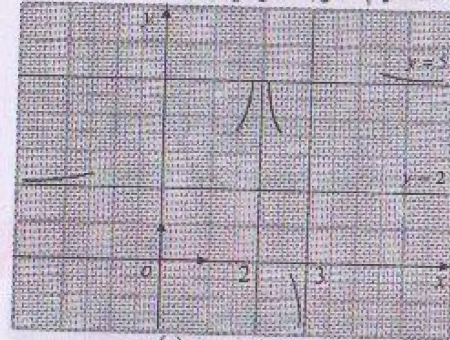
لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

لأن لا نستطيع أن نستنتج نهاية $f(x)$ عند $+\infty$ (حالة عدم التعيين)

وبما أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty, 2[$ لدينا $f(x) > 2$

فإن المنحنى (γ) يقع فوق (d_1)

- بما أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ فإن المنحنى (γ) له مستقيم مقارب عمودي (d_2) معادلته $x = 2$.



إذا كان $x < 2$ فإن (γ) يقع قبل (d_2)

و إذا كان $x > 2$ فإن (γ) يقع بعد (d_2)

- بما أن $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$

فإن المستقيم $x = 3$ مقارب عمودي لـ (γ) .

إذا كان $x < 3$ فإن (γ) يقع بعد (d_3)

و إذا كان $x > 3$ فإن (γ) يقع قبل (d_3)

- بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ فإن المستقيم (d_4) ذا المعادلة $y = 5$ مقارب أفقي لـ (γ) .

و بما أنه من أجل كل $x \in]3, +\infty[$ لدينا $f(x) > 5$ فإن المنحنى (γ) يقع فوق (d_4) .

3 - عمليات على النهايات

لا تكون للدالتين f و g نهايات معروفة نستطيع بحضرة عامة استنتاج نهاية الدوال:

$f + g$ و $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ و نبين مختلف هذه النهايات في الجداول التالية:

النهايات مأخوذة عند $(+\infty)$ أو عند $(-\infty)$ أو عند عدد حقيقي a .

ℓ و ℓ' عندان حقيقيان

• نهاية مجموع دالتين

$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية f
$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية g
$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية g
$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية g
$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية g

• نهاية جداء دالتين

0	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية f
0	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية g
0	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية g
0	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية g
0	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	$+$ أو $-\infty$	إذا كانت نهاية g

• نهاية حاصل قسمة دالتين

نهاية دالة كثيرة الحدود عند $(+\infty)$ تساوي نهاية وحيد الحد الأكبر درجة وعليه :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = -\infty \text{ ، } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 = -\infty$$

كل حد من المجموع له نهاية $(-\infty)$ وبالتالي نستطيع تطبيق القواعد العملية المتعلقة

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

تمرين تدريبي 2

$$f(x) = x^3 \left(4 - \frac{1}{x}\right) \text{ بالعبارة }]0, +\infty[$$

ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند الصفر.

✓ الحل :

$$f = U \times V \text{ نضع } V(x) = 4 - \frac{1}{x} \text{ و } U(x) = x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = 4 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} U(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} V(x) = -\infty$$

إذن في هذه الحالة لدينا عدم التعيين وبالتالي لا نستطيع أن نستنتج نهاية $f(x)$ عند 0.

$$\text{ويمكن أن نكتب } f(x) = 4x^3 - x^2 \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

تمرين تدريبي 3

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 7}{x^2 - 3x + 2}$$

(1) لتكن f الدالة المعرفة بالعبارة

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$g(x) = \frac{x+2}{x+1+\sqrt{x}} \text{ بالعبارة }]0, +\infty[$$

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

✓ الحل

$$(1) \text{ أ } f \text{ دالة معرفة إذا وفقط إذا كان } x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

$$\text{المعادلة } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ لها حلان هما 1 و 2}$$

$$\text{وبالتالي مجموعة تعريف الدالة } f \text{ هي } \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 2) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + x - 7) = -4 \text{ (ب) إذن يجب معرفة إشارة المقام}$$

على يسار العدد 1 إشارة المقام موجبة و على يمينه إشارة المقام سالبة و منه

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 0 \text{ موجبة و } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + x - 7) = 3$$

إذن يجب معرفة إشارة المقام على يسار 2 المقام سالب و على يمينه المقام موجب و منه :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

(2) من أجل قيم كبرى لـ x فإن سلوك $x+2$ و $x+1+\sqrt{x}$ من سلوك x لأن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

وبالتالي نستطيع أن نخمن في أول وهلة أن g نهاية $+\infty$.

و للبرهان على ذلك نضع العنصر المهيمن x كعامل مشترك في البسط و المقام :

$$g(x) = \frac{x(1+\frac{2}{x})}{x(1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x})} = \frac{1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \text{ و منه نستنتج أن}$$

4 - نظريات المقارنة

1 - 4 نظرية الحصر

مبرهنة 1

إذا كان من أجل كل x من المجال $]a, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \text{ و } f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

$$\text{فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell \text{ حيث } \ell \text{ عدد حقيقي.}$$

الإثبات

ليكن J مجالا مفتوحا كفيها مركزه ℓ

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \text{ فإنه يوجد عدد حقيقي } A$$

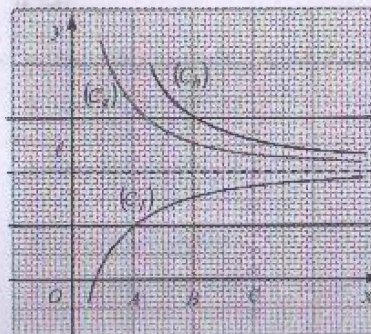
$$\text{بحيث من أجل كل } x > A \text{ يكون } f(x) \in J$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell \text{ فإنه يوجد عدد حقيقي } B$$

$$\text{بحيث من أجل كل } x > B \text{ يكون } h(x) \in J$$

$$\text{إذا اخترنا } C \text{ عددا حقيقيا بحيث } C > A \text{ و } C > B$$

$$\text{وكان } x > C \text{ فإن } f(x) \in J \text{ و } h(x) \in J$$



لكن $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$ مما يبرهن أن $g(x) \in I$

ملاحظة

نتيجة البرهنة (1) تبقى صحيحة إذا كان x يؤول إلى $(-\infty)$.

نتيجة

إذا كان $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \ell$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$

مبرهنة 2

f و g دالتان معرفتان على $I =]\alpha, +\infty[$ و ℓ عدد حقيقي.

إذا كان من أجل كل x لدينا $|f(x) - \ell| \leq g(x)$

و إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

الإثبات:

للتباينة $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ يعني أن $\ell - g(x) \leq f(x) \leq \ell + g(x)$.

و بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ وحسب القواعد العملية في حساب النهايات فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ell + g(x)] = \ell \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ell - g(x)] = \ell$$

وحسب البرهنة (1) فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

مثال -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - 1}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

الحل

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا $-1 \leq \sin x \leq 1$

$$\text{وعليه} \quad \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\text{ولكون} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{فإن حسب نظرية الحصر} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا $-1 \leq \cos x \leq 1$

$$\text{وعليه} \quad \frac{-2}{x} \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq 0 \quad \text{و تكون} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

$$\text{فإن حسب نظرية الحصر} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

4-2 المقارنة في اللانهاية

مبرهنة

f و g دالتان معرفتان على مجال $I =]\alpha, +\infty[$

(1) إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f(x) \geq g(x)$ وإذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

(2) إذا كان من أجل كل x من I لدينا $f(x) \leq g(x)$ وإذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

ملاحظة

نتيجة البرهنة السابقة تبقى صحيحة في حالة ما إذا كان x يؤول إلى $(-\infty)$.

مثال -

$$\text{احسب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x)$$

الحل

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1 \leq \sin x \leq 1$ ومنه $-1 + x \leq x + \sin x \leq 1 + x$

$$\text{بما أن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x) = +\infty \quad \text{و} \quad f(x) \geq 1 + x \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{بما أن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 + x) = -\infty \quad \text{و} \quad f(x) \leq -1 + x \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

5- نهاية الدالة المركبة

مبرهنة

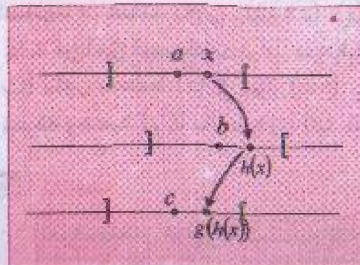
f, g, h ثلاث دوال بحيث $f(x) = g(h(x))$

كل من الحروف a, b, c تمثل إما عددا حقيقيا

أو $+\infty$ أو $-\infty$.

$$\text{إذا كانت} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$$

$$\text{و إذا كانت} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$



مثال -

(1) $g(x) = \sqrt{x+1}$ و $h(x) = 2x+3$ دالتان معرفتان كما يلي

احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(h(x))$

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x}{x-3}}$

الحل ✓

(1) على المجال $[-1, +\infty[$ لدينا $g(h(x)) = \sqrt{2x+4}$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(h(x)) = +\infty$

(2) نضع $g(X) = \sqrt{X}$ و $h(x) = X = \frac{3x}{x-3}$

ومنه $\sqrt{\frac{3x}{x-3}} = g(h(x))$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$ و $\lim_{X \rightarrow 3} g(X) = \sqrt{3}$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x}{x-3}} = \sqrt{3}$

6 - المستقيم المقارب المائل

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم معطى .

القول أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = ax + b$ مع $a \neq 0$

مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$

يعني أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

التفسير الهندسي

من أجل قيمة x من مجال تعريف الدالة f نعتبر

النقطة M من (C_f) والنقطة P من (d)

فاصلتهما x عندئذ يكون $PM = |f(x) - (ax + b)|$

وعليه من أجل قيم كبرى لـ x المسافة PM تقترب من الصفر وهذا مما يفسر أن المنحنى

(C_f) يكون بمحاذاة (d) في جوار $(+\infty)$.

ولمعرفة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) نعين إشارة $[f(x) - (ax + b)]$

ملاحظة

نعرف بنفس الطريقة المستقيم المقارب المائل لجوار $(-\infty)$

مثال -

بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ للمنحنى

(C_f) الممثل للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x+1}$

ثم حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (d)

الحل ✓

$$f(x) - (2x + 1) = \frac{2x^2 + 3x}{x+1} - (2x + 1)$$

$$= \frac{2x^2 + 3x - 2x^2 - 3x - 1}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ فإن المستقيم (d) هو

مقارب مائل للمنحنى (C_f) في جوار $(+\infty)$.

إذا كان $x < -1$ فإن $\frac{-1}{x+1} > 0$

وبالتالي المنحنى (C_f) يقع فوق (d)

وإذا كان $x > -1$ فإن $\frac{-1}{x+1} < 0$ وبالتالي المنحنى (C_f) يقع تحت (d)

مبرهنة

لـ دالة بحيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ مع a و b عددين حقيقيين و $a \neq 0$

ملاحظة

نتيجة المبرهنة السابقة تبقى صحيحة في حالة ما إذا كان x يؤول إلى $-\infty$

مثال -

لـ دالة معرفة على المجال $[1, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

بين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ وآخر في جوار $(-\infty)$.

الحل ✓

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 = a$$

الدالة f مستمرة على المجال I لأن (C_f) عبارة عن خط منحن غير متقطع رسمناه بدون رفع القلم.

الدالة g غير مستمرة على المجال I لأن $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -2$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$ إذن g ليست لها نهاية عند $x = 0$

مثال - 2

دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \frac{|x|-1}{2}$ ادرس استمرار f عند $x = 0$

✓ الحل

$$\text{بما أن } \begin{cases} |x| = x, & x \geq 0 \\ |x| = -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{فإن } \begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{2}, & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{-x-1}{2}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{|0|-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x-1}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

إذن الدالة f لها نهاية $-\frac{1}{2}$ عند $x = 0$ وبالتالي فهي مستمرة عند $x = 0$

2 - 7 قابلية الاشتقاق والاستمرار

مبرهنة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق عند a من I فإن f مستمرة عند a .
إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I فإن f مستمرة على I .

الإثبات

f دالة قابلة للاشتقاق عند a يعني أن الدالة g المعرفة بـ:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{لها نهاية } f'(a)$$

من أجل كل $x \neq a$ لدينا $x(x-a) = f(x) - f(a)$ ومنه ينتج

$$f(x) = f(a) + g(x)(x-a)$$

$$\text{وبما أن } \lim_{x \rightarrow a} (x-a) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f'(a)$$

فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ وهذا يعني أن f دالة مستمرة عند a .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2-1} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2-1}-x)(\sqrt{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^2-1}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0 \end{aligned}$$

إذن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب مائل في جوار $(+\infty)$ معادلته $(d_1): y = x$
- بنفس الطريقة نبين أن (C_f) له مستقيم مقارب مائل (d_2) معادلته $y = -x$ في جوار $(-\infty)$.

7 - الاستمرار

f دالة و I مجال محتوي في D_f

7 - 1 الاستمرار عند عدد و على مجال

- القول أن f مستمرة عند العدد a من I يعني أن f لها نهاية عند a وهذه النهاية

$$\text{بالضرورة } f(a) \text{ ونكتب } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ أو } \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$$

- القول أن f مستمرة على مجال I يعني أن f مستمرة عند كل قيمة من I .

نتيجة

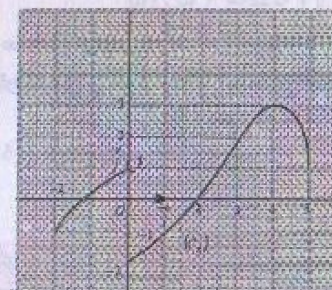
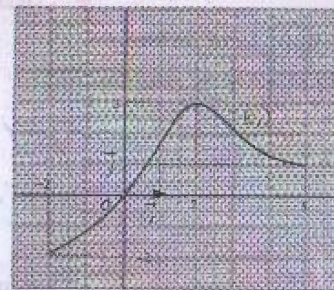
نستنتج من تعريف الاستمرار والقواعد العملية لحساب النهايات أن مجموع،
و جداء و مركب دوال مستمرة هي أيضا دوال مستمرة.

ملاحظة

دراسة استمرار دالة عند قيمة ليست من مجموعة التعريف ليس له معنى.

مثال - 1

f و g دالتان معرفتان على المجال $I = [-2, 5]$ ، (C_f) و (C_g) منحناهما
البيانين كما هو موضح في الشكلين.



ملاحظة:

إذا كانت دالة مستمرة عند a فلا نستطيع القول أنها قابلة للاشتقاق عند a .

مثال -

f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = |x| + 1$ الدالة f مستمرة عند الصفر لكن غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-|x| + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-|x|}{x} = -1$$

و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

استمرار الدوال الرجعية

- دالة الجذر التربيعي قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty)$ إذن فهي مستمرة على نفس المجال وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ فإن هذه الدالة مستمرة عند الصفر ومنه دالة الجذر التربيعي مستمرة على المجال $[0, +\infty)$.

- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها وبالتالي فهي مستمرة على كل مجال محتوي في مجموعة تعريفها.

- البالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ قابلتان للاشتقاق على \mathbb{R} إذن فهما مستمرتان على \mathbb{R} .

ملاحظة:

كل الدوال المشكلة من دوال مرجعية مستمرة على مجموعة تعريفها.

مثال -

f دالة معرفة بـ $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ مجموعة تعريف f هي \mathbb{R} بوضع $g(x) = x^2 + 1$ و $h(x) = \sqrt{x}$ يكون $h \circ g(x) = f(x)$ إذن الدالة f هي تركيب دالتين مرجعيتين وبالتالي فالدالة f مستمرة على \mathbb{R} .

8 - دراسة دالة الجزء الصحيح

من أجل كل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح وحيد n بحيث $n \leq x < n+1$. نسمي دالة الجزء الصحيح بالدالة التي نرمز لها بـ E والتي ترفق بكل عدد حقيقي x من المجال

$[n, n+1]$ العدد الصحيح n ونكتب $E(x) = n$

نختار بعض القيم لـ x

$$E(0) = E(0, 25) = E(0, 75) = 0$$

$$E(1) = E(1, 002) = E(1, 999) = 1$$

$$E(-0, 3) = E(-0, 5) = -1$$

$$E(x) = 0 : 1 < x \leq 0$$

$$E(x) = 1 : 2 \leq x < 1$$

$$E(x) = 2 : 3 \leq x < 2$$

على المجال $[-2, 3]$ يتكون التمثيل

النهائي للدالة E من خمس قطع

مستقيمة ونقطة معزولة.

الدالة E معرفة عند 2 وعلى مجال مركزه 2

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 2} E(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 2} E(x) = 1$ فإن الدالة E ليست لها نهاية عند 2

وبالتالي فهي ليست مستمرة عند هذه القيمة وعليه فإنها مستمرة على $[1, 2]$

9 - الدوال المستمرة وحلول المعادلات

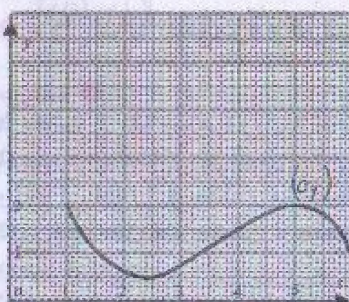
في حالة دالة كثيرة الحدود من الدرجة الثانية نستطيع حل المعادلة $f(x) = k$

أما في حالة دالة كسفية لا نستطيع تعيين الحل الجبري لذلك نلجأ إلى التحليل الذي يسمح لنا بإيجاد القيم التقريبية للحلول إن وجدت وبالدقة التي نريدها.

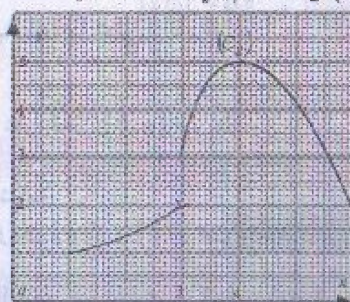
وقبل إجراء أي حساب لابد من معرفة هل توجد حلول أم لا.

مثال -

المنحنيان المثلان في الشكلين المجاورين هما لدالتين f و g العرقتين على $[1, 6]$ الحل البياني للمعادلة $f(x) = k$ هو البحث عن فواصل نقاط تقاطع f و g إن وجدت بين C_f و C_g المستقيم ذي المعادلة $y = k$



الدالة f مستمرة على $[1, 6]$



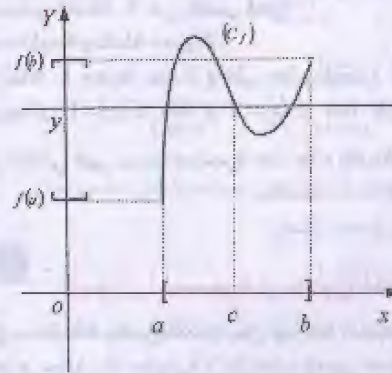
الدالة g غير مستمرة على $[1, 6]$

بالنسبة إلى الدالة f من أجل $2 \leq k \geq 1$ المعادلة $f(x) = k$ لها حلول
بالنسبة إلى الدالة g من أجل كل $5 \geq k \geq 1$ لا توجد حلول للمعادلة $g(x) = k$
لأنه إذا كان $2 < k < 3$ فإن المستقيم $y = k$ لا يقطع المنحنى (C_g) .

9-1 نظرية القيم المتوسطة

مبرهنة

f دالة مستمرة على مجال $[a, b]$.
من أجل كل عدد حقيقي y محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي c
محصورة بين a و b بحيث $f(c) = y$.
نعم عن نتيجة البرهنة يكفيين
مختلفتين بفرض أن $f(a) \leq f(b)$ و بوضع
 $I = [a, b]$ نستطيع القول بطرق متكافئة
من أجل كل y من المجال $[f(a), f(b)]$
المعادلة $f(x) = y$ ذات الجاهل x تقبل
على الأقل حلا c من المجال I .
كل عدد حقيقي y من $[f(a), f(b)]$
هو صورة بالدالة f على الأقل لعدد
حقيقي c من I .



صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

f دالة مستمرة على I .
صورة $I = [a, b]$ بالدالة f و نرمز لها بـ $f(I)$ هي مجموعة كل الأعداد $f(x)$ لما x يمسح I

ملاحظة

المجال $[f(a), f(b)]$ محتوي في $f(I)$

9-2 الدالة المستمرة و الرتبة تماما على $[a, b]$

مبرهنة 1

إذا كانت f دالة مستمرة و رتبة تماما على المجال $I = [a, b]$ فإن
(1) صورة I بالدالة f هي المجال $[f(a), f(b)]$ في حالة f متزايدة تماما
و $[f(b), f(a)]$ في حالة f متناقصة تماما
(2) من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن للمعادلة $f(x) = k$ حلا
وحيدا في $[a, b]$.
نقول عندئذ أن f تقابل من $[a, b]$ في $[f(a), f(b)]$ أو في $[f(b), f(a)]$

الإثبات

نفرض أن f مستمرة و متزايدة تماما على I و k عددا حقيقيا من المجال $[f(a), f(b)]$

(1) من أجل كل عدد حقيقي x من I لدينا $f(b) \geq f(x) \geq f(a)$
لأن كل صورة $f(x)$ تنتمي إلى $[f(a), f(b)]$

وهذا معناه $f(I) \subset [f(a), f(b)]$ (1)

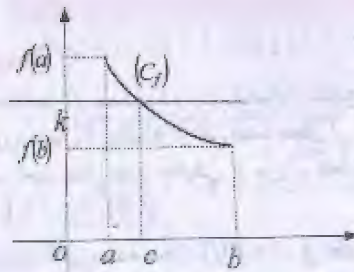
و بالعكس إذا كان $y \in [f(a), f(b)]$ فإن

y هي صورة بالدالة f على الأقل لعدد حقيقي c من I إذا $y \in f(I)$

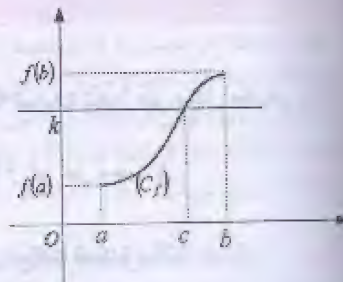
وهذا معناه $[f(a), f(b)] \subset f(I)$ (2)

من (1) و (2) نجد أن $f(I) = [f(a), f(b)]$

(2) حسب نظرية القيم المتوسطة نستطيع إيجاد عدد c من $I = [a, b]$ بحيث $f(c) = k$.
لأن المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا في المجال I و هذا الحل يكون وحيدا لأنه إذا كان
لدينا عدنان حقيقيان c و c' من I و $c < c'$ بحيث $f(c) = f(c') = k$ فإن f ليست
متزايدة وهذا تناقض حيث f متزايدة تماما على I .
لنتيجة البرهنة تبقى صحيحة إذا كانت f متناقصة تماما على $[a, b]$



f دالة متناقصة تماما على $[a, b]$
مجموعة الوصول هي $[f(b), f(a)]$



f دالة متزايدة تماما على $[a, b]$
مجموعة الوصول هي $[f(a), f(b)]$

ملاحظة

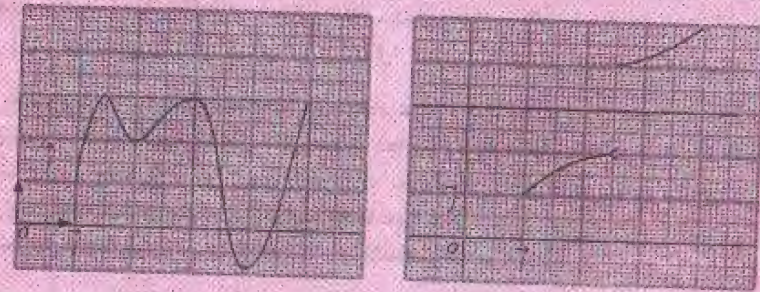
إذا كانت $f(a) = k$ فإن $c = a$ وإذا كان $f(b) = k$ فإن $c = b$

نتيجة

إذا كانت f دالة مستمرة و رتبة تماما على $I = [a, b]$ و إذا كانت
 $f(a)f(b) < 0$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا في I .

ملاحظة

- إذا كانت الدالة f ليست مستمرة فوجود الحل ليس مضمونا كما يبينه الشكل (1) فمثلا المعادلة $f(x)=3$ ليس لها حل.
- وحدانية الحل مضمونة بالرتابة التامة (مترابطة تماما أو متناقصة تماما) فإذا كانت الرتبة غير تامة نستطيع أن نتحصل على عدة حلول كما يبينه الشكل (2) فمثلا المعادلة $f(x)=3$ لها عدة حلول على المجال $[1,5]$.



مبرهنة 2

إذا كانت f مستمرة ورتبية تماما، نتائج المبرهنة 1 السابقة تمتد على مجال كيفي I . صورة المجال I بالدالة f هي أيضا مجال J ، ومن أجل كل عدد حقيقي y من J المعادلة $f(x)=y$ لها حل واحد في I .

$$[f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x)] \cdot I$$

 الجدول الآتي يحدد مجال $J = f(I)$ في كل حالة من الحالات الممكنة لـ I .
 نتقبل أن f لها نهاية حقيقية أو غير منتهية على أطراف I
 وسنريك في الجدول التالي المجال J حيث a و b تمثل اعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$.

صورة I بالدالة f هو المجال		
$I =$	f متزايدة تماما على I	f متناقصة تماما على I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), f(b) [$	$] f(b), \lim_{x \rightarrow a} f(x) [$
$[a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow b} f(x), f(a) [$	$] f(a), \lim_{x \rightarrow b} f(x) [$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow b} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b} f(x), \lim_{x \rightarrow a} f(x) [$

تمرين تدريبي

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالمعادلة $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$
 برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in [3,4]$ ثم أعط حصرا له بتقريب 10^{-1} .

✓ الحل

الجدول التالي يلخص لنا دراسة الدالة f

x	$-\infty$	0	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	-	-	-
$f(x)$	$+\infty$		5	1	-15	$-\infty$

بما أن الدالة f مستمرة ومتناقصة على المجال $[3,4]$ و أيضا $f(3)f(4) < 0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α من المجال $[3,4]$.
 الجدول السابق يبين أيضا أنه من أجل كل $x < 3$ لدينا $f(x) > 0$ ومن أجل كل $x > 4$ لدينا $f(x) < 0$ إذن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في \mathbb{R} إلا الحل α .
 بالآلة الحاسبة البيانية نجد $f(3,1)=0,39$ و $f(3,2)=-1,04$ إذن $3,1 < \alpha < 3,2$.

3-4 القيم التقريبية لحل معادلة

نظرية القيم المتوسطة تسمح لنا بواسطة الحصر المتوالي بتحديد القيم القريبة من حل المعادلة $f(x)=0$ على المجال المغلق $I = [a, b]$
 نفرض أن $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ وليكن $x \in [a, b]$.

طريقة المسح

نفرض أن f مستمرة و متزايدة تماما على $[a, b]$ و نقوم بحساب قيم f ابتداء من $f(a)$ بخطوة مقدارها p على النحو التالي:
 $f(a), f(a+p), f(a+2p), \dots$ حتى نتحصل على القيمة الموجبة $f(a+kp)$ مع $k \in \mathbb{N}$.
 من القيمة a التي تسبق $a+kp$ نبذل الخطوة p بالخطوة p' حيث $p' = \frac{p}{10}$ ونتابع الحسابات بالكيفية السابقة $f(a+p'), f(a+2p'), \dots$
 تكمل هذه العملية حتى نتحصل على التقريب المطلوب للحل.

مثال -

من أجل المعادلة $x^3 - 6x^2 + 7 = 0$ ، أوجد حصرًا بتقريب 0,001 للحل β ، حيث β محصورة بين 0 و 4.

✓ الحل

نشكل أولاً جدولاً من عمودين الأول x والثاني $f(x)$ حيث $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$.
ابتداءً من الصفر بخطوة $p=1$ نراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x) > 0$ وفي هذه الحالة تكون $x=1$.
ونشكل جدولاً ثانياً بخطوة مقدار 0,1. ابتداءً من القيمة 1 و نراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x) > 0$ وفي هذه الحالة $x=1,2$.
ونشكل جدولاً ثالثاً بخطوة مقدار 0,01 ابتداءً من القيمة 1,2 و نراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x) > 0$ والتي هي $x=1,20$.
ونشكل جدولاً رابعاً بخطوة مقدارها 0,001 ابتداءً من 1,20 و نراقب قيمة x التي من أجلها يكون $f(x) > 0$ وفي هذا الجدول $x=1,208$.
الحصر بتقريب 0,001 للحل β هو $1,208 < \beta < 1,209$.

x	$f(x)$
1	2
1,1	1,071
1,2	0,088
1,3	-0,943

$$p=0,1 \\ 1,3 < \beta < 1,2$$

x	$f(x)$
0	7
1	2
2	-9

$$p=1 \\ 1 < \beta < 2$$

x	$f(x)$
1,200	0,0880
1,201	0,0779
1,204	0,0480
1,206	0,0276
1,207	0,0176
1,208	0,072
1,209	-0,01

$$p=0,001$$

x	$f(x)$
1,2	0,088
1,21	-0,0131

$$p=0,01 \\ 1,21 < \beta < 1,20$$

طريقة ديكتومي (القسم على اثنين)

نقسم المجال $[a, b]$ إلى مجالين لهما نفس الطول، ونحسب $f(m)$ حيث m منتصف المجال $[a, b]$.
إشارة $f(m)$ تبين لنا انتماء الحل α إلى $[a, m]$ أو إلى $[m, b]$.

النهايات والاستمرار

- إذا كان $f(m) < 0$ فإن α ينتمي إلى $[m, b]$ وفي هذه الحالة نعيد قسمة المجال $[m, b]$ إلى مجالين لهما نفس الطول ونحسب $f(m')$ حيث $m' = \frac{m+b}{2}$.
إشارة $f(m')$ تبين لنا انتماء الحل α إلى $[m', b]$ أو إلى $[m, m']$ وهكذا نعيد عملية قسمة المجالات حتى نحصل على التقريب المطلوب.



ملاحظة

إذا كان $f(m) > 0$ فإن α ينتمي إلى المجال $[a, m]$ نعيد نفس العملية السابقة للحصول على التقريب المطلوب.

مثال -

من أجل المعادلة $x^3 - 6x^2 + 7 = 0$ ، أوجد حصرًا بتقريب 0,1 للحل β حيث $4 > \beta > 0$.

✓ الحل

نضع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$ ، $f(0) = 7$ ، $f(4) = -25$ ، $I = [a, b] = [0, 4]$ ،
بقسمة المجال $[0, 4]$ إلى مجالين لهما نفس الطول نحصل على $[0, 2]$ و $[2, 4]$.

$$\text{لدينا } m = \frac{0+4}{2} = 2 \text{ و } f(m) = f(2) = -9$$

بما أن $f(m) < 0$ فإن الحل β ينتمي إلى المجال $[0, 2]$.

نقسم المجال $[0, 2]$ إلى مجالين لهما نفس الطول فنحصل على $[0, 1]$ ، $[1, 2]$.

$$\text{لدينا } m' = 1 \text{ و } f(m') = 2$$

بما أن $f(m') > 0$ فإن الحل β ينتمي إلى $[1, 2]$.

نقسم المجال $[1, 2]$ إلى مجالين $[1, \frac{3}{2}]$ ، $[\frac{3}{2}, 2]$.

$$\text{لدينا } m'' = \frac{3}{2} \text{ و } f(m'') = -3,125$$

بما أن $f(m'') < 0$ فإن الحل β ينتمي إلى $[1, \frac{3}{2}]$ ومنه $1,0 < \beta < 1,5$.

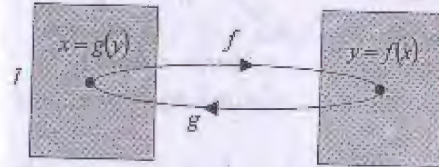
10 - مفهوم الدالة العكسية

f دالة مستمرة ورتيبة تماماً على مجال حقيقي I و J مجال بحيث $J = f(I)$. عندما يتحقق الشرطان التاليان معا :

- (1) من أجل كل عدد حقيقي x من I يكون $f(x)$ ينتمي إلى J
- (2) من أجل كل عدد حقيقي $y \in J$ يوجد عدد حقيقي x وحيد من I بحيث $f(x) = y$.

نقول إن f تقابل من I في J . وعندئذ نستطيع تعريف دالة g على J بالكيفية التالية :

إذا كان y عدد حقيقي من J و $y = f(x)$ فإن $g(y) = x$.
نقول إن الدالة g للعرفة على J هي الدالة العكسية للدالة f على I .



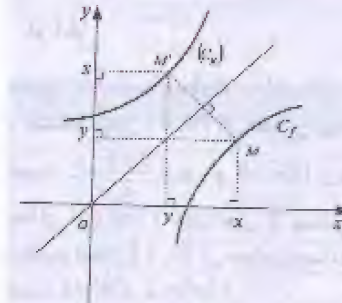
نتيجة

من أجل كل عدد حقيقي x من I لدينا $g(f(x)) = x$ ومن أجل كل عدد حقيقي y من J لدينا $f(g(y)) = y$.

ملاحظة

الدالة العكسية للدالة g هي الدالة f .

التمثيل البياني للدالة العكسية

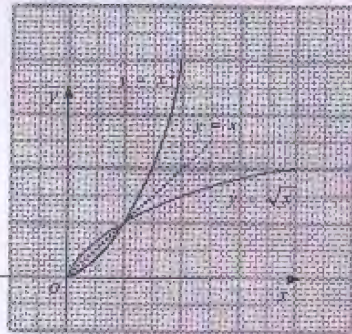


f دالة معرفة على I وتأخذ قيمها في J و g الدالة العكسية لها .
إذن من أجل كل x من I ومن أجل كل y من J :
 $x = g(y)$ تكافئ $y = f(x)$.
(C_f) و (C_g) النحنيان المثلان للدالتين f و g على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس .

(C_g) و (C_f) متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

القول إن النقطتين $M(x, y)$ و $M'(x', y')$ متناظرتان بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$ يكافئ القول أن $x' = y$ و $y' = x$.
نفرض أن M نقطة كيفية من (C_f) إحداثياتها ($x, f(x)$) ونظيرتها بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$ هي $M'(x', y')$ حيث $x' = f(x)$ و $y' = x$ وبما أن M تنتمي إلى (C_f) فإن $x = g(y)$ و $y = f(x)$ ، إذن :

إحداثيات M' هي ($y, g(y)$) مما يبين أن M' تنتمي إلى (C_g) بنفس الطريقة نبين أنه إذا كانت M' من (C_g) فإن نظيرتها M من (C_f) .
مثال -



الدالتان $f: x \mapsto x^2$ و $g: x \mapsto \sqrt{x}$ مستمרותان ومتزايدتان على المجال $[0, +\infty[$ ولدينا $y = x^2$ يكافئ $x = \sqrt{y}$ أي $y = f(x)$ يكافئ $x = g(y)$.
نما يعني أن g هي الدالة العكسية للدالة f على المجال $[0, +\infty[$.
وبالتالي فإن (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة $y = x$.

تمرين تدريبي

لتكن f دالة معرفة على المجال $[2, 5]$ كما يلي $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$.
بين أن f تقبل دالة عكسية g بطلب تحديد مجموعة بدنها و مجموعة وصولها، ثم أوجد عبارتها .

الحل

الدالة f مستمرة على \mathbb{R} وبالتالي فهي مستمرة على $[2, 5]$.
الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} فهي قابلة للاشتقاق على $[2, 5]$ ومن أجل كل $x \in [2, 5]$ لدينا $f'(x) = 4x - 4$.
من أجل كل x من $[2, 5]$ لدينا $f'(x) > 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[2, 5]$.
إذن الدالة f تقابل من $[2, 5]$ في $[f(2), f(5)]$. وبالتالي تقبل دالة عكسية مجموعة بدنها $[-6, 24]$ و مجموعة وصولها $[2, 5]$.
 $y = f(x)$ يكافئ $y = 2x^2 - 4x - 6$ يكافئ $2x^2 - 4x - 6 - y = 0$.
نضع (i) $2x^2 - 4x - 6 - y = 0$.
ميز المعادلة (1) ذات المجهول x هو $\Delta = 4(16 + 2y)$.
بما أن $y \in [-6, 24]$ فإن $\Delta > 0$ ومنه للمعادلة (1) لها حلان هما :
 $x_1 = \frac{2 + \sqrt{16 + 2y}}{2}$ و $x_2 = \frac{2 - \sqrt{16 + 2y}}{2}$.
 x_2 مرفوض لأن من أجل $y = -6$ نجد $x_2 = 0$ و $0 \notin [2, 5]$.
إذن الدالة g معرفة على $[-6, 24]$ بـ $g(y) = x_1 = \frac{2 + \sqrt{16 + 2y}}{2}$.



تطبيقات نموذجية

تطبيق 1

الحل: حساب النهايات

ادرس نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) f(x) = 4x^3 - 2x - 1 \text{ عند } +\infty \text{ وعند } -\infty$$

$$(2) f(x) = -x^4 + 3x^2 + 7 \text{ عند } +\infty \text{ وعند } -\infty$$

$$(3) f(x) = \frac{x+2}{x-2} \text{ عند } +\infty \text{ وعند } -\infty \text{ وعند } 2$$

$$(4) f(x) = \frac{x^2+3x}{x+3} \text{ عند } +\infty \text{ وعند } -\infty \text{ وعند } -3$$

$$(5) f(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x-2} \text{ عند } +\infty \text{ وعند } -\infty \text{ وعند } 2$$

$$(6) f(x) = x^2 + 3 - \frac{2}{(x-4)^2} \text{ عند } +\infty \text{ وعند } -\infty \text{ وعند } 4$$

✓ الحل

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^3 = -\infty$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x^4) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x^4) = -\infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

إذا كان $x > 2$ فإن $x-2 > 0$ وإذا كان $x < 2$ فإن $x-2 < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x+3) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -3} (x^2+3x) = 0$$

فإن نهاية f في جوار 3 هي من الشكل $\frac{0}{0}$

من أجل $x \neq -3$ يكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{x(x+3)}{x+3}$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -3 \text{ ومنه}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x-2} = 0$$

الحسب قاعدة نهاية مجموع دالتين نجد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+3) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(x-4)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(x-4)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ إذن}$$

تطبيق 2

الحل: حساب النهايات لدوال ناطقة

ادرس نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) f(x) = \frac{x+2}{x^2-6x+5} \text{ عند } +\infty, 1, -\infty$$

$$(2) f(x) = \frac{x^4-16}{x^3-8} \text{ عند } 2$$

$$(3) f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x(x-2)} \text{ عند } +\infty \text{ وعند } 2$$

$$(4) f(x) = \frac{|x^2-x|}{x^2+x-2} \text{ عند } +\infty, -\infty, 1$$

✓ الحل

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} (x^2-6x+5) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-6x+5) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 5} (x+2) = 7, \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

إذن لتحمين نهاية f عند 5 أو عند 1 لا بد من معرفة إشارة المقام.

- من أجل كل عدد حقيقي $x > 5$ لدينا $x^2-6x+5 > 0$

و من أجل كل عدد حقيقي $x < 1$ لدينا $x^2-6x+5 > 0$

$$\text{ومنه } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty$$

- من أجل كل عدد حقيقي $x > 5$ لدينا $x^2-6x+5 > 0$

و من أجل كل عدد حقيقي $x < 1$ لدينا $x^2-6x+5 > 0$

تطبيق 3

حساب النهايات لدوال جذرية

احسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(أ) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ عند $x=1$ ، (ب) $f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$ عند $+\infty$

(ج) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ عند $+\infty$ ، (د) $f(x) = \frac{3-\sqrt{5x+4}}{\sqrt{x+3}-2}$ عند $x=1$

الحل ✓

حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{\sqrt{x}}{x})}{x(1-\frac{\sqrt{x}}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{\sqrt{x}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x}}{x}} = 1$

حالة عدم التعيين $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(9-5x-4)(\sqrt{x+3}+2)}{(x+3-4)(3+\sqrt{5x+4})}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3-\sqrt{5x+4})(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(3+\sqrt{5x+4})(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-5)(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(3+\sqrt{5x+4})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5(\sqrt{x+3}+2)}{3+\sqrt{5x+4}} = -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3-8) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^4-16) = 0$ إذن لدينا حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

من أجل $x \neq 1$ نكتب $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}$

إذن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1} = \frac{15}{7}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-2) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} = +\infty$

إذن نهاية f من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2} \times \sqrt{x-2}}{x(x-2)\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)}{x(x-2)\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} = 0 \end{aligned}$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x-2} = +\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow 2} x\sqrt{x-2} = 0^+$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x\sqrt{x-2}} = +\infty$

(4) $\begin{cases} x^2-x = -x^2+x, x \in [0, 1] \\ x^2-x = x^2-x, x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\end{cases}$

ومنه الدالة $f(x)$ نكتب :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x^2+x}{x^2+x-2}, x \in [0, 1] \\ f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x-2}, x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{x+2} = -\frac{1}{3}$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+2} = \frac{1}{3}$

تطبيق 4

حساب النهايات لدوال مثلثية

احسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية:

(أ) $f(x) = \frac{\sin 6x}{x}$ عند 0 ، ب) $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$ عند 0 وعند $+\infty$ ، ج) $f(x) = \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$ عند 0 ، د) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ عند 0

✓ الحل

(أ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{6x} = 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = 6 \times 1 = 6$$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x} \sin 2x}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right) = 0 \times 1 = 0$$

- من أجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا $1 \geq \sin(2x) \geq -1$

$$\text{ومنه } \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} \geq \frac{-1}{\sqrt{x}} \text{ و بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\text{فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ و $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos \frac{x}{2} \times \frac{\frac{x}{2}}{\sin(\frac{x}{2})} = 2$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos \frac{x}{2} = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 1$$

(د) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{0}{0}$ حالة عدم التعيين

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{4(\frac{x}{2})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

تطبيق 5

حساب النهايات

عين نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{5x-2}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم اوجد المجال I بحيث إذا كان x ينتمي إلى I فإن $f(x) > 10^2$

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+ \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} (5x-2) = 3$$

$$10^2 < f(x) < 10^3 \text{ يكافئ } \frac{5x-2}{(x-1)^2} > 10^2 \text{ يكافئ } 10^2 x^2 - 205x + 102 < 0$$

$$\Delta = (205)^2 - 4 \times 100(102) = 1221$$

$$x_2 = \frac{205-35}{100} = \frac{170}{100} = 1,7 \text{ ، } x_1 = \frac{205+35}{100} = \frac{240}{100} = 2,4$$

x	$-\infty$	1,7	2,4	$+\infty$
$10^2 x^2 - 205x + 102$	+	○	○	+

حتى يكون $10^2 x^2 - 205x + 102 < 0$
يجب أن يكون $x \in]1,7 ; 2,4[$
أي $1,7 < x < 2,4$
لذلك المجال $I =]1,7 ; 2,4[$

تطبيق 6

حساب النهايات باستعمال الحصر

f دالة معرفة على \mathbb{R} بحيث أنه من أجل كل x لدينا (I) $1 \leq f(x) \leq 2$...

نعتبر الدالة g المعرفة بـ $g(x) = \frac{3f(x)+5}{x^3}$ بالعبارة

اعط حصرًا لـ $g(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

✓ الحل

بمسرب المتباينة (I) بالعدد 3 نجد $3 \leq 3f(x) \leq 6$ وبإضافة 5 إلى حدود هذه الأخيرة نجد

$$(II) \dots 8 \leq 3f(x) + 5 \leq 11$$

بقسمة حدود المتباينة (II) على العدد الموجب تمامًا x^3 نجد $\frac{8}{x^3} \leq g(x) \leq \frac{11}{x^3}$

وبقسمة حدود المتباينة (II) على العدد السالب تمامًا x^3 نجد $\frac{11}{x^3} \leq g(x) \leq \frac{8}{x^3}$

✓ الحل

(1) نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1 \leq -\cos x \leq 1$ بإضافة 3 إلى حدود المتباينة الأخيرة نجد $2 \leq 3 - \cos x \leq 4$ وبالقلب نجد:

$$(1) \dots\dots\dots \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3 - \cos x} \geq \frac{1}{4}$$

(2) بإضافة $2x$ إلى حدود المتباينة $-1 \leq \sin x \leq 1$ نجد:

$$(2) \dots\dots\dots 1 + 2x \geq 2x + \sin x \geq -1 + 2x$$

بضرب حدود المتباينتين (1) و (2) طرفاً لطرف نجد:

$$\frac{1}{2}(1 + 2x) \geq \frac{2x + \sin x}{3 - \cos x} \geq \frac{1}{4}(-1 + 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}(-1 + 2x) = +\infty$$

تطبيق 9

دراسة وضعية المنحنى بالنسبة إلى مستقيم مقارب

أدرس النهايات عند $-\infty$ ، $+\infty$ و -2 للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{3x}{x+2}$.
ثم حدد وضعية المستقيم المقارب الأفقي بالنسبة إلى المنحنى الدالة f .

✓ الحل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{x+2} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{x+2} = +\infty$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ فإن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 3$ مقارب أفقي لـ (C_f)

ولدراسة وضعية (d) بالنسبة إلى (C_f) ندرس إشارة $f(x) - y$ على D_f

$$f(x) - y = f(x) - 3 = \frac{3x}{x+2} - 3 = \frac{3x - 3x - 6}{x+2} = \frac{-6}{x+2}$$

$$\text{إذا كان } x < -2 \text{ فإن } \frac{-6}{x+2} > 0$$

ومن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (d)

$$\text{إذا كان } x > -2 \text{ فإن } \frac{-6}{x+2} < 0$$

ومن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{11}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{x^3} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11}{x^3} = 0$$

تطبيق 7

حساب النهايات باستعمال العنصر

دالة معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بالعبارة $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{x}$

$$(1) \text{ تحقق من أن } f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$$

$$(2) \text{ استنتج أن } \frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ ثم احسب نهاية } f \text{ عند } +\infty$$

✓ الحل

$$f(x) = \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{x})(\sqrt{2+x} + \sqrt{x})}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{x})} = \frac{(2+x) - (x)}{\sqrt{2+x} + \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{2+x} + \sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{x} \text{ أي } \sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x} \quad (2)$$

$$\text{ومن } f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \dots (1)$$

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{x+2}$$

$$\text{ومن } f(x) \geq \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \text{ أي } f(x) \geq \frac{2}{2\sqrt{x+2}} \dots (2)$$

$$\text{من (1) و (2) نجد } \frac{1}{\sqrt{x+2}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

تطبيق 8

حساب النهايات باستعمال العنصر

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{3 - \cos x}$$

$$(1) \text{ بين أن } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3 - \cos x} \leq \frac{1}{2}$$

$$(2) \text{ استنتج حصر الدالة } f(x) \text{ من أجل كل } x \text{ ثم عين } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

تطبيق 10

حساب النهايات باستعمال الدالة المركبة

احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

- (1) عند $f(x) = \cos \pi x + \frac{1}{(x-2)^2}$ (2) عند $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-4}}$ (3) عند $f(x) = \sin(\frac{\pi x+2}{2x+3})$ (4) عند $f(x) = (x - \sqrt{x} + \frac{1}{x-1})^3$

الحل

(1) نضع $X = \frac{x+2}{x-4}$ ومنه $f(x) = \sqrt{X}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \sqrt{7} \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 5} X = \frac{7}{1} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2} \cos \pi x = 1 \quad (2)$$

وحسب قواعد العملية لجمع النهايات نجد $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 + \infty = +\infty$

(3) نضع $X = x - \sqrt{x} + \frac{1}{x-1}$ منه $f(x) = X^3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} X = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{(x-1)x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-1)x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} X^3 = +\infty$$

(4) بوضع $X = \frac{\pi x+2}{2x+3}$ فيكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x} = \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

تطبيق 11

تعيين عبارة دالة

f دالة معرفة بالعبارة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-d}$ و (C_f) متحنها البياني

عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث النحني (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $x = 4$ مقارباً عمودياً ويقبل عند $(+\infty)$ و عند $(-\infty)$ مستقيماً مقارباً مائلاً معادلته $y = 3x - 4$ ويمر بالنقطة $A(2, 3)$

الحل

النحني (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة $x = 4$ مقارباً له هذا معناه أن $4 - d = 0$ أي $d = 4$

بما أن $y = 3x - 4$ معادلة للمستقيم القارب المائل لـ (C_f) فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

$$\text{وبما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ فإن } a = 3$$

$$\text{وبما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = b \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = -4 \text{ فإن } b = -4$$

$A(2, 3)$ تنتمي إلى (C_f) هذا معناه $f(2) = 3$

$$f(2) = 3 \text{ يكافئ } 2a + b + \frac{c}{2-d} = 3 \text{ يكافئ } c = -2$$

$$\text{فإن } f(x) = 3x - 4 - \frac{2}{x-4}$$

تطبيق 12

تعيين معادلة المستقيم القارب المائل لنحني

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعبارة $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ و (C_f) متحنها البياني

البياني في معلم متعامد ومتجانس.

(1) أثبت أن (d) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارباً مائلاً لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

(ب) ادرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (d)

(2) هل المستقيم ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(-\infty)$

الحل

(1) (d) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$ إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}} - 1 = 0$$

إذن (d) هو مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $(+\infty)$

لدراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (d) ندرس إشارة القدار $f(x) - (x+1)$ على \mathbb{R}

$$\text{لنبدأ } f(x) - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1$$

نلاحظ أنه إذا كان $x \leq 0$ فإن $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 \leq 0$ وفي هذه الحالة النحني (C_f) يقع تحت (d)

الحل ✓

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{9x^2 - 1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + |x| \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{9x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + |x| \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}})$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(1 - \sqrt{9 - \frac{1}{x^2}}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 4x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{9x^2 - 1} - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x + \sqrt{9x^2 - 1})$$

$$= \frac{(-3x + \sqrt{9x^2 - 1}) \times (-3x - \sqrt{9x^2 - 1})}{(-3x - \sqrt{9x^2 - 1})}$$

$$= \frac{-9x^2 - 9x^2 + 1}{-3x - \sqrt{9x^2 - 1}} = \frac{1}{-3x - \sqrt{9x^2 - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-3x - \sqrt{9x^2 - 1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{-1 + 9x^2} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{1 + 9x^2})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{1 + 9x^2}) = \frac{(3x + \sqrt{1 + 9x^2})(3x - \sqrt{1 + 9x^2})}{3x - \sqrt{1 + 9x^2}} = \frac{+1}{3x - \sqrt{1 + 9x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{+1}{3x - \sqrt{1 + 9x^2}} = 0$$

(ج) من (ب) و (ج) نستنتج أن (C_f) له مستقيمين مقاربين مائلين هما :

$$(d_1): y = -2x \text{ في جوار } (-\infty) \text{ و } (d_2): y = 4x \text{ في جوار } (+\infty)$$

تعيين حلول معادلة

تطبيق 15

$$f \text{ دالة معرفة على } I = [0, 3] \text{ بالعبارة } f(x) = \frac{1}{x+2}$$

(1) شكل جدول تغيرات الدالة f على I ثم عيّن $f(I)$

(2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{4}$ على I ؟

$$f(x) - (x+1) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{-9}{(x + \sqrt{x^2+9})\sqrt{x^2+9}}$$

بما أن $x > 0$ فإن $x + \sqrt{x^2+9} > 0$ و $\sqrt{x^2+9} > 0$ فإن $f(x) - (x+1) < 0$

ومنه المنحني (C_f) يقع تحت (d)

(2) نلاحظ أنه من أجل كل x من \mathbb{R} فإن $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = -f(x)$

أي أن f فردية وبالتالي نظير المستقيم (d) بالنسبة إلى مبدأ العلم هو $d': y = x-1$

إذن $y = x-1$ هي فعلا معادلة المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) في جوار $(-\infty)$

تعيين المنحني المقارب للمنحني

تطبيق 16

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} \text{ دالة معرفة على }]-\infty, +\infty[\text{ بالعبارة}$$

و (C_f) منحناها البياني أوجد معادلة منحني مقارب لـ (C_f) ثم حدد

وضعيته بالنسبة إلى (C_f)

الحل ✓

لا x يؤول إلى $+\infty$ فإن $f(x)$ تسلك سلوك $\frac{x^4}{x^2}$ أي x^2 ولا تسلك سلوك $ax+b$

لأن لا يمكن إيجاد مستقيم مقارب من الشكل $y = ax+b$ لـ (C_f) وعليه ندرس $(f(x) - x^2)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x^2 - 2)] = 0$$

ومنه نستنتج أن المنحني ذا المعادلة $y = x^2 - 2$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$

بما أن $f(x) - (x^2 - 2) = \frac{-1}{x^2 + 1} < 0$ فإن (C_f) يقع تحت المنحني المقارب.

تعيين المستقيمت المقاربة للمنحني

تطبيق 17

$$f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = x + \sqrt{9x^2 - 1} \text{ و تمثيلها البياني } (C_f)$$

(1) حدد نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$

$$(2) \text{ ا حسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 4x) \text{ و ا حسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x)$$

(ج) استنتج أن (C_f) له مستقيمان مقاربين يطلب تعيين معادليهما ؟

✓ الحل

(1) الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, 3]$ ومن أجل كل x من I لدينا $f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$ ومنه:

x	0	3
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	0,5	$\frac{1}{5}$

من أجل كل x من I
لدينا $f'(x) < 0$ وبالتالي الدالة f
متناقصة تماما على I

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ و } f(3) = \frac{1}{5}$$

من جدول تغيرات f نستنتج أن

$$f(I) = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right]$$

(2) بما أن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على I و $\frac{1}{4}$ ينتمي إلى $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right]$ فإن حسب

نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α للمعادلة $f(x) = \frac{1}{4}$

تطبيق 16

تحديد تعيين حلول معادلة

f دالة معرفة على \mathbb{R} بالعلاقة التالية $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$

(1) احسب $f(1)$, $f(0)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(-1)$

(2) استنتج أن للمعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول حقيقية على المجال $[-1, 1]$

✓ الحل

$$(1) f(1) = \frac{1}{2}, f(0) = -\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}, f(-1) = -\frac{3}{2}$$

(2) الدالة f مستمرة على \mathbb{R} فهي مستمرة على $[-1, 1]$ لأنها دالة كثيرة حدود

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[-1, 1]$ ولدينا $f'(x) = 12x^2 - 3$

$$f'(x) = 0 \text{ يكافئ } x = \frac{1}{2} \text{ أو } x = -\frac{1}{2}$$

$f''(x)$ يتغير عند $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ مغيرا إشارته بجوارهما وبالتالي f ليست رتيبة على المجال $[-1, 1]$

$$f(-1) \times f(-\frac{1}{2}) < 0$$

وحسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد α على المجال $[-1, -\frac{1}{2}]$ للمعادلة $f(x) = 0$

$f(0) < 0$ و $f(-\frac{1}{2}) > 0$ حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد β على المجال $[-\frac{1}{2}, 0]$

للمعادلة $f(x) = 0$

• $f(0) > 0$ و $f(\frac{1}{2}) < 0$ حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد حل وحيد γ للمعادلة $f(x) = 0$

على المجال $[0, 1]$ وبالتالي نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول في $[-1, 1]$

تطبيق 17

دراسة استمرار دالة

$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(2) هل الدالة f مستمرة عند الصفر على \mathbb{R} ؟

✓ الحل:

(1) من أجل كل x من \mathbb{R}^* لدينا $-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1$ ومنه $-x^2 \leq x^2 \cos \frac{1}{x} \leq x^2$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

(2) بما أن الدالة f معرفة عند الصفر و f لها نهاية وحيدة عند الصفر

فإن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ وعليه فإن الدالة f مستمرة عند 0

بالتالي $x \rightarrow \frac{1}{x}$ و $x \rightarrow \cos x$ مستمرتان على \mathbb{R}^*

وبالتالي الدالة المركبة hog مستمرة على \mathbb{R}^* ($hog(x) = \cos \frac{1}{x}$)

الدالة $x^2 \rightarrow x^2$ مستمرة على \mathbb{R}^*

إذن جداء الدالتين $x^2 \rightarrow x^2$ و hog مستمرة على \mathbb{R}^* وعليه فإن f مستمرة على \mathbb{R}

تمارين و مسائل



1- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = 3x^4 + 5$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

(2) $f(x) = -x^4 - x^2 - x + 1$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$

(3) $f(x) = \frac{-x+5}{2x+1}$ عند $-\infty, +\infty, -\frac{1}{2}$

(4) $f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$ عند $+\infty, -\infty$

(5) $f(x) = -5x + 4 + \frac{1}{2x+1}$ عند $-\infty, +\infty, -\frac{1}{2}$

(6) $f(x) = \frac{3x^2}{(x-3)(1-x)}$ عند $+\infty, -\infty, 1, 3$

(7) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{(x-1)(4-x)}$ عند $+\infty, -\infty, 1, 4$

2- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = \frac{x+3}{2x^2+x-1}$ عند $-\infty, +\infty, -1, \frac{1}{2}$

(2) $f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{3}{x^3-4}$ عند $-\infty, +\infty, -2, 2$

(3) $f(x) = \frac{x-3}{x\sqrt{x-3}}$ عند $+\infty, 3$

(4) $f(x) = \frac{|x|(x-1)}{x^2+|x|-2}$ عند $+\infty, -\infty, -1, 1$

3- أدرس نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+x}+1$ عند $+\infty, -\infty$

(2) $f(x) = \sqrt{x^2+4}-2x+1$ عند $+\infty, -\infty$

(3) $f(x) = \frac{-x+1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+4}-2}$ عند $0, +\infty$

4- f و g دالتان معرفتان على $[-2, +\infty[\cup]-\infty, -2]$ بالعبارتين :

$$f(x) = \sqrt{x^2-4}-x \quad \text{و} \quad g(x) = \sqrt{x^2-4}+x$$

برهن أن $f(x) \times g(x) = -4$ وما هي نهاية g عند $(+\infty)$ ؟ ثم استنتج نهاية f عند $(+\infty)$ ؟ وما هي أيضا نهاية f عند $(-\infty)$ ؟ ثم استنتج نهاية f عند $(-\infty)$ ؟

5- f دالة معرفة على \mathbb{R}^* بـ $f(x) = \frac{x^4-2x^2+3}{x^2}$ بين الجمل الصحيحة من الخاصية

برر ذلك :

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ (ب) الدالة f زوجية . (ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(د) $f(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم . (هـ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 6$

6- احسب نهايات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = \frac{\tan(x)}{x}$ عند 0 (2) $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{x^2}$ عند 0

(3) $f(x) = \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$ عند 0 مع α و β حقيقيان غير معدومين

(4) $f(x) = \frac{\tan x + \sin x}{x^3}$ عند 0 (5) $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}$ عند 0

7- احسب نهاية الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

(1) $f(x) = \frac{1-\sin x + \cos x}{1-\sin x - \cos x}$ عند $\frac{\pi}{2}$

(2) $f(x) = \frac{2x-\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$ عند 0

(3) $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(-\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$ عند 0

(4) $f(x) = \frac{1}{\cos 2x} - \tan 2x$ عند $\frac{\pi}{4}$

8- بين أن $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$ ثم استنتج نهاية الدالة $\frac{1-\cos x}{x^2}$ عند $x \rightarrow 0$

9- أوجد نهاية الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{5x-1}{(x-1)^2}$ عند 1 ثم أوجد عددا حقيقيا α

بحيث إذا كان $x \in]-\alpha, 1+\alpha[$ فإن $f(x) > 10^2$

- (1) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ فإن (d) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$
 (ب) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) عند $(+\infty)$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
 (ج) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) عند $(-\infty)$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-3)] = +\infty$
 (د) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) عند $(-\infty)$ فإنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$
 (هـ) إذا كان (d) مقارب لـ (C_f) فإن $f(x)$ يمكن كتابته بالشكل التالي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$$

- (10) f دالة معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ ومنحنها البياني (C_f) .
 أوجد منحنى مقارب لـ (C_f) ثم حدد وضعيته بالنسبة إلى (C_f) .

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 3} \text{ بـ } \mathbb{R} \text{ دالة معرفة على}$$

(1) احسب نهاية f عند $+\infty, -\infty$

(2) أكتب $4x^2 - 4x + 3$ على الشكل النموذجي

- (ب) أدرس النهاية عند $+\infty$ و $-\infty$ للدالة g المعرفة بـ $g(x) = f(x) - \sqrt{(2x-1)^2}$
 (ج) استنتج أن المنحنى الممثل للدالة f له مستقيمان مقاربان مائلان يطلب تعيينهما
 ثم بين أن (C_f) يقع فوق كل منهما.

(21) f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ:

$$f(x) = -x^3 + 3x + 1$$

- (1) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها
 (2) برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في كل مجال من المجالات التالية:
 $[-2, -1], [-1, 1], [1, 2]$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \text{ بـ } \mathbb{R} \text{ المعرفة على}$$

لذا للمعادلة $f(x) + 1 = 0$ ثلاثة حلول مختلفة على \mathbb{R} ؟

$$(1) \text{ بين أن المعادلة } -x^3 - x + 4 = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا على } \mathbb{R}$$

اعط حصارا لهذا الحل بتقريب 0.001

- (2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي a المعادلة $-x^3 - x + 4 = a$ لها حل وحيد في \mathbb{R}

$$(10) \text{ عين نهاية الدالة } f \text{ المعرفة بـ } f(x) = \frac{6x-1}{4x-1} \text{ عند } +\infty$$

ثم أوجد عددا حقيقيا A بحيث إذا كان $x \in]1,4, 1,6[$ فإن $f(x) \in A$

$$(11) f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ } f(x) = \cos^2 x - x + 1$$

(1) لماذا لا يمكن تطبيق القواعد العملية في حساب نهايات f عند $+\infty$ و $-\infty$ ؟

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $-x+1 \leq f(x) \leq -x+2$

ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

$$(12) \text{ بين أنه من أجل كل } x > -1 \text{ لدينا } \frac{-1}{x+1} < \frac{\cos x}{x+1} < \frac{1}{x+1}$$

ثم استنتج نهاية الدالة $\frac{\cos x}{x+1}$ عند $+\infty$

$$(13) f \text{ دالة معرفة على }]2, +\infty[\text{ بالعلاقة } f(x) = \frac{3x + \cos x}{x-2}$$

(2) $x > 2$ لدينا $\frac{3x-1}{x-2} \leq f(x) \leq \frac{3x+1}{x-2}$ ثم استنتج نهاية f عند $+\infty$

$$(14) f \text{ دالة بحيث من أجل كل } x > 0, f(x) \geq \frac{1}{3}x^2 + 1$$

ما هي نهاية f عند $(+\infty)$ ؟

(15) عين نهاية الدوال f, g, h عند $+\infty$ و $-\infty$ باستعمال نظرية الحصر

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}, g(x) = x^2 + 3 + \cos x, h(x) = -x + 1 + \sin x$$

$$(16) f \text{ دالة بحيث من أجل كل } x \geq 0: |f(x) - 4| \leq \frac{2}{x+1}$$

ما هي نهاية f عند $+\infty$ ؟

$$(17) \text{ أدرس النهايات عند } -\infty, +\infty, -\frac{1}{2} \text{ للدالة } f \text{ المعرفة بـ } f(x) = \frac{-3x}{2x+1}$$

ثم حدد معادلات المستقيمات المقاربة وكذا الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب الأفقي.

$$(18) f \text{ دالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ و } (C_f) \text{ منحنها البياني في معلم معطى و } (d) \text{ مستقيم}$$

معادلته $y = x - 3$ عين الجمل الصحيحة من بين الجمل الآتية: